

2. Übung zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Spitzer / Golénia

SS 2008

Abgabe bis 28.04.2008 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 4. Seien $A := \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ und $(E) : Y'(t) = (AY)(t)$ mit $Y(0) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$.

- Geben Sie die Eigenwerte von A an. Ist A diagonalisierbar?
- Finden Sie die Gleichungen der Eigenräume von A und zeichnen Sie diese im \mathbb{R}^2 ein.
- Finden Sie P sodass $A = PDP^{-1}$ mit $D := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- Berechnen Sie damit $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$.
- Weisen Sie nach, dass die Lösung von (E) die Form $Y(t) = \exp(tA)Y(0)$ hat mit $Y(t) = PX(t)$, wobei $X'(t) = (DX)(t)$.
- Skizzieren Sie für $t \in \mathbb{R}$ die 9 Lösungen mit $Y(0) = PX(0)$ und $X_i \in \{-1, 0, 1\}$. Geben Sie die Asymptoten der Lösungen für $t \rightarrow \pm\infty$ an.
- Erklären Sie, wie man für jeden Anfangswert $Y(0)$ die Lösungskurve skizziert.

(1+1+1+1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 5. Wir betrachten nun die DGL $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

- Seien y_0, y_1 Lösungen von (E) . Zeigen Sie, dass $y_0 - y_1$ eine Lösung von $(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$ ist.
- Sei S_0 der Raum der Lösungen von (E_0) . Zeigen Sie, dass S_0 ein Vektorraum ist.
- Schreiben Sie (E_0) als ein autonomes System erster Ordnung in der Form $X'(t) = F(X)$.
- Mithilfe des Satz von Picard-Lindelöf und b) zeigen Sie, dass $\dim(S_0) = 2$.
- Finden Sie alle Lösungen von (E_0) mithilfe des Ansatzes $y(x) = P(x)e^{mx}$, wobei $m \in \mathbb{R}$ und P ein Polynom ist.
- Finden Sie eine Lösung von (E) mithilfe des gleichen Ansatzes. Verwenden Sie von a) und e) und finden Sie damit alle Lösungen von (E) .
- Finden Sie die einzige Lösung von (E) , sodass $y(0) = 3$ und $y'(0) = 1$ gilt.

(1+1+1+1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 6. Sei $(E) : 2(f')^2 f - f^2(f'' + f') + f^3 = 0$.

- Definiere $f = 1/u$. Dann nehmen wir an, dass u keine Nullstelle hat. Berechnen Sie u' und u'' in Abhängigkeit von f .
- Zeigen Sie, dass $(E') : u'' + u' + u = 0$ gilt.
- Zeigen Sie, dass die Lösungen von (E') von der Form $Ae^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2 + \phi)$ sind, wobei $A, \phi \in \mathbb{R}$. Warum haben wir dann alle Lösungen von (E') ? (Sehen Sie Aufgabe 2).
- Auf welchem Intervall \mathcal{I} haben wir $u(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{I}$? Wie schauen die Lösungen von (E) auf diesem Intervall aus?

(1+2+2+1 Punkte)